Тема 18. Тригонометричні рівняння

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій.

Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де x — невідома величина, a — довільне дійсне число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями*.

1. Рівняння $\sin x = a$.

$\boxed{\sin x = a}$

$|a| > 1$: Коренів немає

$|a| \leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$

$\sin x = 0$	$x = \pi k, \; k \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in Z$

2. Рівняння $\cos x = a$.

$\boxed{\cos x = a}$

$|a| > 1$: Коренів немає

$|a| \leqslant 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$\cos x = 0$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k, \; k \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k, \; k \in Z$

3. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$.

$\operatorname{tg} x = a$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z$

Окремий випадок $\operatorname{tg} x = 0$

$x = \pi n, \; n \in Z$

$\operatorname{ctg} x = a$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z$

Окремий випадок $\operatorname{ctg} x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in Z$

Рівняння, що зводяться до квадратних

Нехай потрібно розв'язати рівняння $4\cos^2\frac{x}{2}-8\cos\frac{x}{2}+3=0$. Уведемо нову змінну: $\cos\frac{x}{2}=t$, звідки одержимо рівняння: $4t^2-8t+3=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{2}; \\ t_2=1{,}5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни та розв'яжемо одержані рівняння: 1) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 2) $\cos\frac{x}{2}=1{,}5$; $x\in\varnothing$.

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Рівняння виду asinx + bcosx = c, де a, b, c∈R

Рівняння цього виду розв'язують за допомогою введення допоміжного кута. Вважаючи, що $a^2+b^2\neq 0$, поділимо обидві частини вихідного рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ й одержимо: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Одержані коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ мають такі властивості: $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, тому можна стверджувати, що існує такий кут φ, що, наприклад, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$. Тоді останнє рівняння зводиться до найпростішого: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin x+4\cos x=2$. Перетворимо рівняння: $3\sin x+4\cos x=2$; $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{3^2+4^2}}$; $\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{2}{5}$. Уведемо допоміжний кут: $\frac{3}{5}=\cos\varphi$, $\frac{4}{5}=\sin\varphi$. Оскільки $\sin\varphi>0$ і $\cos\varphi>0$, то за допоміжний кут φ можна взяти $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Тоді маємо: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{2}{5}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{2}{5}$; $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Відповідь. $(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідні тригонометричні рівняння — це рівняння виду $a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x\cos x + a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x + + ... + a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x + a_n\cos^n x = 0$, де a_0, a_1, a_2, ..., a_n — дійсні числа, $n \geq 1$. Таке рівняння легко звести до рівняння відносно $\text{tg}x$, якщо всі його члени поділити на $\cos^n x$. При цьому, якщо $a_0 \neq 0$, то ділення не спричиняє втрати коренів. Справді, якщо $\cos x = 0$, то початкове рівняння набуває вигляду $a_0\sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$, що неможливо, оскільки cosx і sinx одночасно не можуть дорівнювати нулю.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$: $\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$. Одержимо: $3\text{tg}^2 x - 2\text{tg}x - 1 = 0$. Уведемо заміну $\text{tg}x = t$ й матимемо: $3t^2 - 2t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{1}{3}; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

1) $\text{tg}\,x = -\frac{1}{3}$; $x = \text{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\text{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\text{tg}\,x = 1$; $x = \text{arctg}\,1 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $-\text{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Дробово-раціональні тригонометричні рівняння

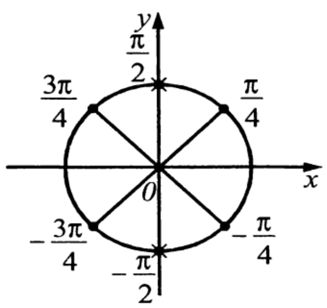
Складність розв'язування рівнянь цього типу полягає у формуванні відповіді. Основною складністю при розв'язуванні дробово-раціональних тригонометричних рівнянь є відбір його коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{\cos x + \cos 3x}{\sin 2x} = 0$. ОДЗ: $\sin 2x \neq 0$; $2x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розв'яжемо рівняння $\cos x + \cos 3x = 0$; $2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} = 0$; $2\cos 2x\cos x = 0$. Тоді $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}; \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Зобразимо на одиничному колі точки, які відповідають кореням рівняння $\cos x = 0$ і $\cos 2x = 0$ і закреслимо точки, які не входять в ОДЗ.



Отже, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — корені рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.